EXCERPT · INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, PARIS, 1900

Mathematische Probleme

D. Hilbert

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

23

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwickelung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der muthmaßlichen Entwickelung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passiren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht blos auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im Allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Ueberfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbstständigen Entwickelung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont.

Es ist schwierig und oft unmöglich, den Wert eines Problems im Voraus richtig zu beurteilen; denn schließlich entscheidet der Gewinn, den die Wissenschaft dem Problem verdankt. Dennoch können wir fragen, ob es allgemeine Merkmale giebt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen.

Ein alter französischer Mathematiker hat gesagt: Eine mathematische Theorie ist nicht eher als vollkommen anzusehen, als bis du sie so klar gemacht hast, daß du sie dem ersten Manne erklären könntest, den du auf der Straße triffst. Diese Klarheit und leichte Faßlichkeit, wie sie hier so drastisch für eine mathematische Theorie verlangt wird, möchte ich viel mehr von einem mathematischen Problem fordern, wenn dasselbe vollkommen sein soll; denn das Klare und leicht Faßliche zieht uns an, das Verwickelte schreckt uns ab.

Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten — uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.

[...]

Diese merkwürdige Thatsache neben anderen philosophischen Gründen ist es wohl, welche in uns eine Ueberzeugung entstehen läßt, die jeder Mathematiker gewiß teilt, die aber bis jetzt wenigstens niemand durch Beweise gestützt hat — ich meine die Ueberzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mißlingens aller Versuche dargethan wird. Man lege sich irgend ein bestimmtes ungelöstes Problem vor, etwa die Frage nach der Irrationalität der Euler-Mascheronischen Constanten C oder die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen von der Form $2^n + 1$ giebt. So unzugänglich diese Probleme uns erscheinen und so ratlos wir zur Zeit ihnen gegenüber stehen — wir haben dennoch die sichere Ueberzeugung, daß ihre Lösung durch eine endliche Anzahl rein logischer Schlüsse gelingen muß.

Ist dieses Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems eine dem mathematischen Denken allein charakteristische Eigentümlichkeit oder ist es vielleicht ein allgemeines dem inneren Wesen unseres Verstandes anhaftendes Gesetz, daß alle Fragen, die er stellt, auch durch ihn einer Beantwortung fähig sind? Trifft man doch auch in anderen Wissenschaften alte Probleme an, die durch den Beweis der Unmöglichkeit in der befriedigendsten Weise und zum höchsten Nutzen der Wissenschaft erledigt worden sind. Ich erinnere an das Problem des Perpetuum mobile. Nach den vergeblichen Versuchen der Construktion eines Perpetuum mobile forschte man vielmehr nach den Beziehungen, die zwischen den Naturkräften bestehen müssen, wenn ein Perpetuum mobile unmöglich sein soll[1], und diese umgekehrte Fragestellung führte auf die Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, das seinerseits die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile in dem ursprünglich verlangten Sinne erklärt.

Diese Ueberzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus!

Unermeßlich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik, und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle zahllose neue Probleme auf. Gestatten Sie mir im Folgenden, gleichsam zur Probe, aus verschiedenen mathematischen Disciplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt.

Ueberblicken wir die Principien der Analysis und der Geometrie. Die anregendsten und bedeutendsten Ereignisse des letzten Jahrhunderts sind auf diesem Gebiete, wie mir scheint, die arithmetische Erfassung des Begriffs des Continuums in den Arbeiten von Cauchy, Bolzano, Cantor und die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Gauss, Bolyai, Lobatschefskiy. Ich lenke daher zunächst Ihre Aufmerksamkeit auf einige diesen Gebieten angehörenden Probleme.

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums.

Zwei Systeme, d. h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen (oder Punkten) heißen nach Cantor aequivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden können, daß einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untersuchungen von Cantor über solche Punktmengen machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch Niemanden gelungen ist; dieser Satz lautet:

Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen d. h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt)menge ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämmtlicher reellen Zahlen und mithin dem Continuum, d. h. etwa den Punkten einer Strecke aequivalent; *im Sinne der Aequivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Continuum.*

Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Continuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Continuum.

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Irgend ein System von reellen Zahlen heißt geordnet, wenn von irgend zwei Zahlen des Systems festgesetzt ist, welches die frühere und welches die spätere sein soll, und dabei diese Festsetzung eine derartige ist, daß, wenn eine Zahl a früher als die Zahl b und b früher als c ist, so auch stets a früher als c erscheint. Die natürliche Anordnung der Zahlen eines Systems heiße diejenige, bei der die kleinere als die frühere, die größere als die spätere festgesetzt wird. Es giebt aber, wie leicht zu sehen ist, noch unendlich viele andere Arten, wie man die Zahlen eines Systems ordnen kann.

Wenn wir eine bestimmte Ordnung der Zahlen ins Auge fassen und aus denselben irgend ein besonderes System dieser Zahlen, ein sogenanntes Teilsystem oder eine Teilmenge, herausgreifen, so erscheint diese Teilmenge ebenfalls geordnet. Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisirt sind, daß nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existirt. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet. Denn, wenn wir als Teilmenge die Punkte einer endlichen Strecke mit Ausnahme des Anfangspunktes der Strecke ins Auge fassen, so besitzt diese Teilmenge jedenfalls kein frühestes Element. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener elementaren Begriffe und jede Aussage innerhalb des Bereiches der Wissenschaft, deren Grundlagen wir prüfen, gilt uns nur dann als richtig, falls sie sich mittelst einer endlichen Anzahl logischer Schlüsse aus den aufgestellten Axiomen ableiten läßt. Bei näherer Betrachtung entsteht die Frage, *ob etwa gewisse Aussagen einzelner Axiome sich untereinander bedingen und ob nicht somit die Axiome noch gemeinsame Bestandteile enthalten, die man beseitigen muß, wenn man zu einem System von Axiomen gelangen will, die völlig von einander unabhängig sind.*

Vor Allem aber möchte ich unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome gestellt werden können, dies als das wichtigste Problem bezeichnen, *zu beweisen, daß dieselben untereinander widerspruchslos sind, d. h. daß man auf Grund derselben mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu Resultaten gelangen kann, die miteinander in Widerspruch stehen.*

[...]

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauss[2] spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden[3]; auch ist es Gerling[4] gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in congruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, *zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist*.

4. Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte.

Eine andere Problemstellung, betreffend die Grundlagen der Geometrie ist diese. Wenn wir von den Axiomen, die zum Aufbau der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nötig sind, das Parallelenaxiom unterdrücken, bezüglich als nicht erfüllt annehmen, dagegen alle übrigen Axiome beibehalten, so gelangen wir bekanntlich zu der Lobatschefskijschen (hyperbolischen) Geometrie; wir dürfen daher sagen, daß diese Geometrie insofern eine der Euklidischen nächststehende Geometrie ist. Fordern wir weiter, daß dasjenige Axiom nicht erfüllt sein soll, wonach von drei Punkten einer Geraden stets einer und nur einer zwischen den beiden anderen liegt, so erhalten wir die Riemannsche (elliptische) Geometrie, so daß diese Geometrie als eine der Lobatschefskijschen nächststehende erscheint. Wollen wir eine ähnliche principielle Untersuchung über das Archimedische Axiom ausführen, so haben wir dieses als nicht erfüllt anzusehen und gelangen somit zu den Nicht-Archimedischen Geometrien, die von Veronese und mir untersucht worden sind. Die allgemeinere Frage, die sich nun erhebt, ist die, ob sich noch nach anderen fruchtbaren Gesichtspunkten Geometrien aufstellen lassen, die mit gleichem Recht der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehend sind, und da möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf einen Satz lenken, der von manchen Autoren sogar als Definition der geraden Linie hingestellt worden ist und der aussagt, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist. Der wesentliche Inhalt dieser Aussage reduzirt sich auf den Satz von Euklid, daß im Dreiecke die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite ist, einen Satz, welcher wie man sieht, lediglich von elementaren d. h. aus den Axiomen unmittelbar entnommenen Begriffen handelt, und daher der logischen Untersuchung zugänglicher ist. Euklid hat den genannten Satz vom Dreieck mit Hülfe des Satzes vom Außenwinkel auf Grund der Congruenzsätze bewiesen. Man überzeugt sich nun leicht, daß der Beweis jenes Euklidischen Satzes allein auf Grund derjenigen Congruenzsätze, die sich auf das Abtragen von Strecken und Winkeln beziehen, nicht gelingt, sondern daß man zum Beweise eines Dreieckscongruenzsatzes bedarf. So entsteht die Frage nach einer Geometrie, in welcher alle Axiome der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und insbesondere alle Congruenzaxiome mit Ausnahme des einen Axioms von der Dreieckscongruenz (oder auch mit Ausnahme des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) gelten und in welcher überdies noch der Satz, daß in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, als besonderes Axiom aufgestellt wird.

[...]

In der Minkowskischen Geometrie gilt das Parallelenaxiom; ich gelangte bei einer Betrachtung[5], die ich über den Satz von der geraden Linie als kürzester Verbindung zweier Punkte anstellte, zu einer Geometrie, in welcher nicht das Parallelenaxiom gilt, während alle übrigen Axiome der Minkowskischen Geometrie erfüllt sind. Wegen der wichtigen Rolle, die der Satz von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte und der im wesentlichen aequivalente Satz von Euklid über die Seiten eines Dreiecks nicht nur in der Zahlentheorie, sondern auch in der Theorie der Flächen und in der Variationsrechnung spielt, und da ich glaube, daß die eingehendere Untersuchung der Bedingungen für die Gültigkeit dieses Satzes ebenso auf den Begriff der Entfernung wie auch noch auf andere elementaren Begriffe z. B. den Begriff der Ebene und die Möglichkeit ihrer Definition mittelst des Begriffes der Geraden ein neues Licht werfen wird, so erscheint mir die *Aufstellung und systematische Behandlung der hier möglichen Geometrieen* wünschenswert.

[...]

5. Lie's Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differenzirbarkeit der die Gruppe definirenden Functionen.

Lie hat bekanntlich mit Hinzuziehung des Begriffs der continuirlichen Transformationsgruppe ein System von Axiomen für die Geometrie aufgestellt und auf Grund seiner Theorie der Transformationsgruppen bewiesen, daß dieses System von Axiomen zum Aufbau der Geometrie hinreicht. Da Lie jedoch bei Begründung seiner Theorie stets annimmt, daß die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, so bleibt in den Lieschen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Diese Ueberlegung, sowie auch gewisse Probleme hinsichtlich der arithmetischen Axiome legen uns die allgemeinere Frage nahe, *in wieweit der Liesche Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzirbarkeit der Functionen unserer Untersuchung zugänglich ist*.

[...]

Auch für unendliche Gruppen ist, wie ich glaube, die Untersuchung der entsprechenden Frage von Interesse. Ueberhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Functionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter der Voraussetzung der Differenzirbarkeit der auftretenden Functionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel[6] mit so vielem Scharfsinn behandelten Functionalgleichungen, die Differenzengleichungen und andere in der Litteratur vorkommende Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differenzirbarkeit der auftretenden Functionen zwingt, und bei gewissen Existenzbeweisen in der Variationsrechnung fiel mir direkt die Aufgabe zu, aus dem Bestehen einer Differenzengleichung die Differenzirbarkeit der betrachteten Function beweisen zu müssen. In allen diesen Fällen erhebt sich daher die Frage, *inwieweit etwa die Aussagen, die wir im Falle der Annahme differenzirbarer Functionen machen können, unter geeigneten Modifikationen ohne diese Voraussetzung gültig sind.*

[...]

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik.

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*

[...]

7. Irrationalität und Transcendenz bestimmter Zahlen.

Hermite's arithmetische Sätze über die Exponentialfunction und ihre Weiterführung durch Lindemann sind der Bewunderung aller mathematischer Generationen sicher. Aber zugleich erwächst uns die Aufgabe, auf dem betretenen Wege fortzuschreiten. Ich möchte daher eine Klasse von Problemen kennzeichnen, die meiner Meinung nach als die nächstliegenden hier in Angriff zu nehmen sind. Wenn wir von speciellen, in der Analysis wichtigen transcendenten Functionen erkennen, daß sie für gewisse algebraische Argumente algebraische Werte annehmen, so erscheint uns diese Thatsache stets als besonders merkwürdig und der eingehenden Untersuchung würdig. Wir erwarten eben von transcendenten Funktionen, daß sie für algebraische Argumente im Allgemeinen auch transcendente Werte annehmen, und obgleich uns wohl bekannt ist, daß es thatsächlich ganze transcendente Functionen giebt, die für alle algebraischen Argumente sogar rationale Werte besitzen, so werden wir es doch für höchst wahrscheinlich halten, daß z. B. die Exponentialfunction $e^{i\pi z}$ die offenbar für alle rationalen Argumente z stets algebraische Werte hat, andrerseits für alle irrationalen algebraischen Argumente z stets transcendente Zahlenwerte annimmt. Wir können dieser Aussage auch eine geometrische Einkleidung geben, wie folgt. *Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck das Verhältnis vom Basiswinkel zum Winkel an der Spitze algebraisch, aber nicht rational ist, so ist das Verhältnis zwischen Basis und Schenkel stets transcendent.* Trotz der Einfachheit dieser Aussage und der Aehnlichkeit mit den von Hermite und Lindemann gelösten Problemen halte ich doch den Beweis dieses Satzes für äußerst schwierig, ebenso wie etwa den Nachweis dafür, *daß die Potenz α^β für eine algebraische Basis α und einen algebraisch irrationalen Exponenten β, z. B. die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ oder $e^\pi = i^{-2i}$, stets eine transcendente oder auch nur eine irrationale Zahl darstellt*. Es ist gewiß, daß die Lösung dieser und ähnlicher Probleme uns zu ganz neuen Methoden und zu neuen Einblicken in das Wesen specieller irrationaler und transcendenter Zahlen führen muß.

8. Primzahlenprobleme.

In der Theorie der Verteilung der Primzahlen sind in neuerer Zeit durch Hadamard, de la Vallée Poussin, v. Mangoldt und Andere wesentliche Fortschritte gemacht worden. Zur vollständigen Lösung der Probleme, die uns die Riemannsche Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" gestellt hat, ist es jedoch noch nötig, die Richtigkeit der äußerst wichtigen Behauptung von Riemann *nachzuweisen, daß die Nullstellen der Function $\zeta(s)$*, die durch die Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

dargestellt wird, *sämtlich den reellen Bestandteil ½ haben* — wenn man von den bekannten negativ ganzzahligen Nullstellen absieht. Sobald dieser Nachweis gelungen ist, so würde die weitere Aufgabe darin bestehen, die Riemannsche unendliche Reihe für die Anzahl der Primzahlen genauer zu prüfen und insbesondere *zu entscheiden, ob die Differenz zwischen der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer Größe x und dem Integrallogarithmus von x in der That von nicht höherer als der ½ten Ordnung in x unendlich wird*, und ferner, ob dann die von den ersten complexen Nullstellen der Function $\zeta(s)$ abhängenden Glieder der Riemannschen Formel wirklich die stellenweise Verdichtung der Primzahlen bedingen, welche man bei den Zählungen der Primzahlen bemerkt hat.

Nach einer erschöpfenden Diskussion der Riemannschen Primzahlenformel wird man vielleicht dereinst in die Lage kommen, an die strenge Beantwortung des Problems von Goldbach[7] zu gehen, ob jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist, ferner an die bekannte Frage, ob es unendlich viele Primzahlenpaare mit der Differenz 2 giebt oder gar an das allgemeinere Problem, ob die lineare Diophantische Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

mit gegebenen ganzzahligen paarweise teilerfremden Coefficienten a, b, c stets in Primzahlen x, y lösbar ist.

Aber von nicht geringerem Interesse und vielleicht von noch größerer Tragweite erscheint mir die Aufgabe, *die für die Verteilung der rationalen Primzahlen gewonnenen Resultate auf die Theorie der Verteilung der Primideale in einem gegebenen Zahlkörper k zu übertragen* — eine Aufgabe, die auf das Studium der dem Zahlkörper zugehörigen Function

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s}$$

hinausläuft, wo die Summe über alle Ideale $\mathfrak{j}$ des gegebenen Zahlkörpers k zu erstrecken ist und $n(\mathfrak{j})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{j}$ bedeutet.

[...]

9. Beweis des allgemeinsten Reciprocitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper.

Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reciprocitätsgesetz der $l$ten Potenzreste bewiesen werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet und ferner, wenn l eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, sowie die wesentlichen Hülfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir entwickelte Theorie des Körpers der $l$ten Einheitswurzeln[8] und meine Theorie[9] des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer Diophantischen Gleichung.

Eine Diophantische Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlencoefficienten.

Unsere jetzige Kenntnis der Theorie der quadratischen Zahlkörper[10] setzt uns in den Stand, *die Theorie der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln und beliebigen algebraischen Zahlencoefficienten erfolgreich in Angriff zu nehmen.* Damit gelangen wir insbesondere zu der interessanten Aufgabe, eine vorgelegte quadratische Gleichung beliebig vieler Variabeln mit algebraischen Zahlencoefficienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Coefficienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind.

[...]

12. Ausdehnung des Kronekerschen Satzes über Abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich.

Von Kronecker rührt der Satz her, daß jeder Abelsche Zahlkörper im Bereich der rationalen Zahlen durch Zusammensetzung aus Körpern von Einheitswurzeln entsteht. Dieser fundamentale Satz aus der Theorie der ganzzahligen Gleichungen enthält zwei Aussagen, nämlich

erstens wird durch denselben die Frage nach der Anzahl und Existenz derjenigen Gleichungen beantwortet, die einen vorgeschriebenen Grad, eine vorgeschriebene Abelsche Gruppe und eine vorgeschriebene Diskriminante in Bezug auf den Bereich der rationalen Zahlen besitzen, und

zweitens wird behauptet, daß die Wurzeln solcher Gleichungen einen Bereich algebraischer Zahlen bilden, der genau mit demjenigen Bereiche übereinstimmt, den man erhält, wenn man in der Exponentialfunction $e^{i\pi z}$ für das Argument z der Reihe nach alle rationalen Zahlenwerte einträgt.

[...]

Von der höchsten Bedeutung endlich erscheint mir die Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes auf den Fall, *daß an Stelle des Bereichs der rationalen Zahlen oder des imaginären quadratischen Zahlenbereiches ein beliebiger algebraischer Zahlkörper als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt wird;* ich halte dies Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Functionentheorie.

[...]

Wie wir sehen, treten in dem eben gekennzeichneten Problem die drei grundlegenden Disciplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Functionentheorie in die innigste gegenseitige Berührung und ich bin sicher, daß insbesondere die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Variabelen eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, *diejenigen Functionen aufzufinden und zu diskutiren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunction für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunction für den imaginären quadratischen Zahlkörper.*

[...]

13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7ten Grades mittelst Functionen von nur 2 Argumenten.

[...]

Wahrscheinlich ist nun die Wurzel der Gleichung 7ten Grades eine solche Function ihrer Coefficienten, die nicht zu der genannten Klasse nomographisch construirbarer Functionen gehört, d. h. die sich nicht durch eine endliche Anzahl von Einschachtelungen von Functionen zweier Argumente erzeugen läßt. Um dieses einzusehen, wäre der Nachweis dafür nötig, *daß die Gleichung 7ten Grades*

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

nicht mit Hülfe beliebiger stetiger Functionen von nur zwei Argumenten lösbar ist. Daß es überhaupt analytische Functionen von drei Argumenten x, y, z giebt, die nicht durch endlich-malige Verkettung von Functionen von nur zwei Argumenten erhalten werden können, davon habe ich mich, wie ich noch bemerken möchte, durch eine strenge Ueberlegung überzeugt.

14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Functionensysteme.

[...]

Es seien eine Anzahl m von ganzen rationalen Functionen $X_1, X_2, ..., X_m$ der n Variabeln $x_1, x_2, ..., x_n$ vorgelegt:

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ X_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Jede ganze rationale Verbindung von $X_1, ..., X_m$ wird offenbar durch Eintragung dieser Ausdrücke notwendig stets eine ganze rationale Function von $x_1, ..., x_n$. Es kann jedoch sehr wohl gebrochene rationale Functionen von $X_1, ..., X_m$ geben, die nach Ausführung jener Substitution (S) zu ganzen Functionen in $x_1, ..., x_n$ werden. Eine jede solche rationale Function von $X_1, ..., X_m$, die nach Ausführung der Substitution (S) ganz in $x_1, ... x_n$ wird, möchte ich eine relativganze Function von $X_1, ..., X_m$ nennen. Jede ganze Function von $X_1, ..., X_m$ ist offenbar auch relativganz; ferner ist die Summe, die Differenz und das Product relativganzer Functionen stets wiederum relativganz.

Das entstehende Problem ist nun zu entscheiden, ob es stets möglich ist, *ein endliches System von relativganzen Functionen von $X_1, ..., X_m$ aufzufinden, durch die sich jede andere relativganze Function von $X_1, ..., X_m$ in ganzer rationaler Weise zusammensetzen läßt.* Wir können das Problem noch einfacher formuliren, wenn wir den Begriff des endlichen Integritätsbereiches einführen. Unter einem endlichen Integritätsbereiche möchte ich ein solches System von Functionen verstehen, aus welchem sich eine endliche Anzahl von Functionen auswählen läßt, mit deren Hülfe alle übrigen Functionen des Systems in ganzer rationaler Weise ausdrückbar sind. Unser Problem läuft dann darauf hinaus, zu zeigen, daß die sämtlichen relativganzen Functionen eines beliebigen Rationalitätsbereiches stets einen endlichen Integritätsbereich bilden.

Es liegt auch nahe, das Problem *zahlentheoretisch zu verfeinern*, indem man die Coefficienten der gegebenen Functionen $f_1, ..., f_m$ als ganze rationale Zahlen annimmt und unter den relativganzen Functionen von $X_1, ..., X_m$ nur solche rationalen Functionen dieser Argumente versteht, die nach Ausführung jener Substitution (S) ganze rationale Functionen von $x_1, ..., x_n$ mit ganzen rationalen Coefficienten werden.

[...]

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül.

Das Problem besteht darin, *diejenigen geometrischen Anzahlen strenge und unter genauer Feststellung der Grenzen ihrer Gültigkeit zu beweisen, die insbesondere Schubert[11] auf Grund des sogenannten Princips der speciellen Lage mittelst des von ihm ausgebildeten Abzählungskalküls bestimmt hat.* Wenn auch die heutige Algebra die Durchführbarkeit der Eliminationsprocesse im Princip gewährleistet, so ist zum Beweise der Sätze der abzählenden Geometrie erheblich mehr erforderlich, nämlich die Durchführung der Elimination bei besonders geformten Gleichungen in der Weise, daß der Grad der Endgleichungen und die Vielfachheit ihrer Lösungen sich voraussehen läßt.

16. Problem der Topologie algebraischer Curven und Flächen.

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Curve n ter Ordnung haben kann, ist von Harnack[12] bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Curvenzüge in der Ebene. Was die Curven 6ter Ordnung angeht, so habe ich mich — freilich auf einem recht umständlichen Wege — davon überzeugt, daß die 11 Züge, die sie nach Harnack haben kann, keinesfalls sämtlich außerhalb von einander verlaufen dürfen, sondern daß ein Zug existiren muß, in dessen Innerem ein Zug und in dessen Aeußerem neun Züge verlaufen oder umgekehrt. *Eine gründliche Untersuchung der gegenseitigen Lage bei der Maximalzahl von getrennten Zügen scheint mir ebenso sehr von Interesse zu sein, wie die entsprechende Untersuchung über die Anzahl, Gestalt und Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche im Raume* — ist doch bisher noch nicht einmal bekannt, wieviel Mäntel eine Fläche 4ter Ordnung des dreidimensionalen Raumes im Maximum wirklich besitzt[13].

Im Anschluß an dieses rein algebraische Problem möchte ich eine Frage aufwerfen, die sich, wie mir scheint, mittelst der nämlichen Methode der continuirlichen Coefficientenänderung in Angriff nehmen läßt, und deren Beantwortung für die Topologie der durch Differentialgleichungen definirten Curvenschaaren von entsprechender Bedeutung ist — nämlich die Frage nach *der Maximalzahl und Lage der Poincaréschen Grenzcykeln (cycles limites) für eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades* von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

wo X, Y ganze rationale Funktionen $n$ten Grades in x, y sind, oder in homogener Schreibweise

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z ganze rationale homogene Functionen $n$ten Grades von x, y, z bedeuten und diese als Funktionen des Parameters t zu bestimmen sind.

17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate.

Definit heißt eine solche ganze rationale Funktion oder Form beliebig vieler Veränderlichen mit reellen Coefficienten, die für keine reellen Werte dieser Veränderlichen negativ ausfällt. Das System aller definiten Funktionen verhält sich invariant gegenüber den Operationen der Addition und der Multiplikation; aber auch der Quotient zweier definiten Funktionen ist — sofern er eine ganze Funktion der Veränderlichen wird — eine definite Form. Das Quadrat einer jeden beliebigen Form ist offenbar stets eine definite Form; da aber, wie ich gezeigt habe[14], nicht jede definite Form durch Addition aus Formenquadraten zusammengesetzt werden kann, so entsteht die Frage — die ich für den Fall ternärer Formen in bejahendem Sinne entschieden habe[15] —, *ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann.* Zugleich ist es für gewisse Fragen hinsichtlich der Möglichkeit gewisser geometrischer Construktionen wünschenswert, zu wissen, ob die Coefficienten der bei der Darstellung zu verwendenden Formen stets in demjenigen Rationalitätsbereiche angenommen werden dürfen, der durch die Coefficienten der dargestellten Form gegeben ist[16].

[...]

18. Aufbau des Raumes aus congruenten Polyedern.

[...]

Genau die entsprechenden Thatsachen gelten auch im dreidimensionalen Raume. Die Thatsache der Endlichkeit der Bewegungsgruppen im elliptischen Raume ist eine unmittelbare Folge eines fundamentalen Satzes von C. Jordan[17], wonach die Anzahl der wesentlich verschiedenen Arten von endlichen Gruppen linearer Substitutionen mit n Veränderlichen eine gewisse endliche, von n abhängige Grenze nicht überschreitet. Die Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich im hyperbolischen Raume sind von Fricke und Klein in den Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen[18] untersucht worden und endlich haben Fedorow[19], Schoenflies[20] und neuerdings Rohn[21] den Beweis dafür erbracht, daß es im Euklidischen Raume nur eine endliche Zahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt. Während nun die den elliptischen und hyperbolischen Raum betreffenden Resultate und Beweismethoden unmittelbar auch für den n-dimensionalen Raum Geltung haben, so scheint die Verallgemeinerung des den Euklidischen Raum betreffenden Satzes erhebliche Schwierigkeiten zu bieten und es ist daher die Untersuchung der Frage wünschenswert, ob *es auch im n-dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt*.

Ein Fundamentalbereich einer jeden Bewegungsgruppe zusammen mit den congruenten aus der Gruppe entspringenden Bereichen liefert offenbar eine lückenlose Ueberdeckung des Raumes. Es erhebt sich die Frage, ob ferner auch *solche Polyeder existiren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten und mittelst derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung congruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist*. Ich weise auf die hiermit in Zusammenhang stehende, für die Zahlentheorie wichtige und vielleicht auch der Physik und Chemie einmal Nutzen bringende Frage hin, wie man unendlich viele Körper von der gleichen vorgeschriebenen Gestalt, etwa Kugeln mit gegebenem Radius oder reguläre Tetraeter mit gegebener Kante (bez. in vorgeschriebener Stellung) im Raume am dichtesten einbetten, d. h. so lagern kann, daß das Verhältnis des erfüllten Raumes zum nichterfüllten Raume möglichst groß ausfällt.

[...]

19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?

Eine der begrifflich merkwürdigsten Thatsachen in den Elementen der Theorie der analytischen Functionen erblicke ich darin, daß es partielle Differentialgleichungen giebt, deren Integrale sämtlich notwendig analytische Functionen der unabhängigen Variabeln sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind. Die bekanntesten partiellen Differentialgleichungen dieser Art sind die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

und gewisse von Picard[22] untersuchte lineare Differentialgleichungen, ferner die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche und andere. Die Mehrzahl dieser partiellen Differentialgleichungen haben als Merkmal miteinander gemein, daß sie die Lagrangeschen Differentialgleichungen gewisser Variationsprobleme sind und zwar solcher Variationsprobleme

$$\iint F(p, q, z; x, y)\, dx\, dy = \text{Minimum}, \qquad \left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

bei denen für alle in Frage kommenden Argumente die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0$$

gilt, während F selbst eine analytische Function ist. Wir wollen ein solches Variationsproblem ein reguläres Variationsproblem nennen. Die regulären Variationsprobleme sind es vornehmlich, die in der Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik eine Rolle spielen, und es liegt die Frage nahe, ob alle Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytische Functionen sein müssen, *d. h. ob jede Lagrangesche partielle Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems die Eigenschaft hat, daß sie nur analytische Integrale zuläßt* — selbst wenn man, wie bei dem Dirichletschen Potentialprobleme, der Function irgend welche stetige, aber nicht analytische Randwerte aufzwingt.

[...]

20. Allgemeines Randwertproblem.

Ein wichtiges Problem, welches mit dem eben genannten in engem Zusammenhange steht, ist die Frage nach der Existenz von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen mit vorgeschriebenen Randwerten. Die scharfsinnigen Methoden von H. A. Schwarz, C. Neumann und Poincaré haben dieses Problem für die Differentialgleichung des Potentials im Wesentlichen gelöst, doch erscheinen diese Methoden im Allgemeinen nicht unmittelbar der Ausdehnung fähig auf den Fall, indem am Rande die Differentialquotienten oder Beziehungen zwischen diesen und den Werten der Function vorgeschrieben sind, oder wenn es sich nicht um Potentialflächen handelt, sondern etwa nach Flächen kleinsten Flächeninhalts oder nach Flächen mit constanter positiver Gaussscher Krümmung gefragt wird, die durch eine vorgelegte Raumcurve hindurch laufen oder über eine gegebene Ringfläche zu spannen sind. Ich bin überzeugt, daß es möglich sein wird, diese Existenzbeweise durch einen allgemeinen Grundgedanken zu führen, auf den das Dirichletsche Princip hinweist und der uns dann vielleicht in den Stand setzen wird, der Frage näher zu treten, *ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der gegebenen Grenzbedingungen gewisse Annahmen* — etwa die Stetigkeit und stückweise öftere Differenziirbarkeit, der für die Randbedingungen maßgebenden Functionen — *erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt*[23].

21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen z möchte ich auf ein wichtiges Problem hinweisen, welches wohl bereits Riemann im Sinne gehabt hat, und welches darin besteht, zu zeigen, daß es stets *eine lineare Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit gegebenen singulären Stellen und einer gegebenen Monodromiegruppe giebt*. Die Aufgabe verlangt also die Auffindung von n Functionen der Variabeln z, die sich überall in der complexen z-Ebene regulär verhalten, außer etwa in den gegebenen singulären Stellen: in diesen dürfen sie nur von endlich hoher Ordnung unendlich werden und beim Umlauf der Variabeln z um dieselben erfahren sie die gegebenen linearen Substitutionen. Die Existenz solcher Differentialgleichungen ist durch Constantenzählung wahrscheinlich gemacht worden, doch gelang der strenge Beweis bisher nur in dem besonderen Falle, wo die Wurzeln der Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen sämtlich vom absoluten Betrage 1 sind. Diesen Beweis hat L. Schlesinger[24] auf Grund der Poincaréschen Theorie der Fuchsschen ζ-Functionen erbracht. Es würde offenbar die Theorie der linearen Differentialgleichungen ein wesentlich abgeschlosseneres Bild zeigen, wenn die allgemeine Erledigung des bezeichneten Problems gelänge.

22. Uniformisirung analytischer Beziehungen mittelst automorpher Functionen.

Wie Poincaré zuerst bewiesen hat, gelingt die Uniformisirung einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen zwei Variabeln stets durch automorphe Functionen einer Variabeln; d. h. wenn eine beliebige algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln vorgelegt ist, so lassen sich für dieselben stets solche eindeutigen automorphen Functionen einer Variabeln finden, nach deren Einsetzung die algebraische Gleichung identisch in dieser Variabeln erfüllt ist. Die Verallgemeinerung dieses fundamentalen Satzes auf nicht algebraische, sondern beliebige analytische Beziehungen zwischen zwei Variabeln hat Poincaré[25] ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen und zwar auf einem völlig anderen Wege als derjenige war, der ihn bei dem anfangs genannten speciellen Probleme zum Ziele führte. Aus Poincarés Beweis für die Möglichkeit der Uniformisirung einer beliebigen analytischen Beziehung zwischen zwei Variabeln geht jedoch noch nicht hervor, ob es möglich ist, die eindeutigen Functionen der neuen Variabeln so zu wählen, daß, während diese Variabele das reguläre Gebiet jener Functionen durchläuft, auch wirklich die Gesamtheit aller regulären Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes zur Darstellung gelangt. Vielmehr scheinen in Poincarés Untersuchungen, abgesehen von den Verzweigungspunkten, noch gewisse andere im Allgemeinen unendlichviele diskrete Stellen vorgelegten analytischen Gebildes ausgenommen zu sein, zu denen man nur gelangt, indem man die neue Variable gewissen Grenzstellen der Functionen nähert. *Eine Klärung und Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in Anbetracht der fundamentalen Bedeutung der Poincaréschen Fragestellung äußerst wünschenswert*.

[...]

23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung.

Bisher habe ich im Allgemeinen möglichst bestimmte und specielle Probleme genannt, in der Erwägung, daß es gerade die bestimmten und speciellen Probleme sind, die uns am meisten anziehen und von denen oft der nachhaltigste Einfluß auf die Gesamtwissenschaft ausgeht. Dennoch möchte ich mit einem allgemeinen Probleme schließen, nämlich mit dem Hinweise auf eine Disciplin, die bereits mehrmals in meinem Vortrage Erwähnung fand — eine Disciplin, die trotz der erheblichen Förderung, die sie in neuerer Zeit durch Weierstrass erfahren hat, dennoch nicht die allgemeine Schätzung genießt, die ihr meiner Ansicht nach zukommt — ich meine die *Variationsrechnung*[26].

Die Variationsrechnung im weitesten Sinne ist die Lehre vom Variiren der Functionen und erscheint uns als solche wie eine denknotwendige Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. So aufgefaßt, bilden beispielsweise die Poincaréschen Untersuchungen über das Dreikörperproblem ein Kapitel der Variationsrechnung, insofern darin Poincaré aus bekannten Bahncurven von gewisser Beschaffenheit durch das Princip des Variirens neue Bahncurven von ähnlicher Beschaffenheit ableitet.

[...]

Die genannten Probleme sind nur Proben von Problemen; sie genügen jedoch, um uns vor Augen zu führen, wie reich, wie mannigfach und wie ausgedehnt die mathematische Wissenschaft schon heute ist und es drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich daß sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander verstehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganze, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissenstoffes im Einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hülfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogieen in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen werden entdeckt. So kommt es, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.

Aber — so fragen wir — wird es bei der Ausdehnung des mathematischen Wissens für den einzelnen Forscher nicht schließlich unmöglich, alle Teile dieses Wissens zu umfassen? Ich möchte als Antwort darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, daß jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hülfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorieen erleichtern und umständliche ältere Entwickelungen beseitigen und daß es daher dem einzelnen Forscher, indem er sich diese schärferen Hülfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orientiren als dies für irgend eine andere Wissenschaft der Fall ist.

Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exacten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger!

1 Vgl. Helmholtz, Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. Vortrag, gehalten in Königsberg 1854.
2 Werke, Bd. 8, S. 241 und 244.
3 Vgl. außer der früheren Litteratur Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kapitel IV.
4 Gauss's Werke, Bd. 8, S. 242.
5 Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 91.
6 Werke, Bd. 1 S. 1, 61, 389.
7 Vgl. P. Stäckel: Ueber Goldbach's empirisches Theorem. Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1896 und Landau, ebenda 1900.
8 Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Bd. IV, 1897. Fünfter Teil.
9 Mathematische Annalen, Bd. 51 und Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.
10 Hilbert, Ueber den Dirichletschen biquadratischen Zahlenkörper, Mathematische Annalen, Bd. 45; Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 und Mathematische Annalen. Bd. 51; Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Körper, Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898; Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, Kapitel VIII § 83.
11 Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879.
12 Mathematische Annalen, Bd. 10.
13 Vgl. Rohn, Flächen vierter Ordnung, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886.
14 Mathematische Annalen Bd. 32.
15 Acta mathematica Bd. 17.
16 Vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. VII, insbesondere § 38.
17 Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878) und Atti della Reale Accademia di Napoli 1880.
18 Leipzig 1897. Vgl. insbesondere Abschnitt I, Kap. 2—3.
19 Symmetrie der regelmäßigen Systeme von Figuren 1890.
20 Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891.
21 Mathematische Annalen Bd. 53.
22 Journal de l'École Polytechnique 1890.
23 Vgl. meinen Vortrag über das Dirichletsche Princip. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VIII 1900, S. 184.
24 Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2, Teil 2 No. 366.
25 Bulletin de la Société Mathématique de France XI. 1883.
26 Lehrbücher sind: Moigno-Lindelöf „Leçons du calcul des variations", Paris 1861 und A. Kneser, „Lehrbuch der Variationsrechnung", Braunschweig 1900.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1900, Heft 3, pp. 253-297.

Excerpt: the opening, the 23 problems as stated, and the close. Every cut is marked [...]. Public domain.

de.wikisource.org